Programme de colle n°18

semaine du 9 au 13 février

Notions vues en cours

Chapitre 24 : Polynômes (Partie C) et fractions rationnelles

- Diviseur trivial d'un polynôme P (c'est un polynôme associé à 1 ou à P), P est irréductible sur $\mathbb{K}$ si tous ses diviseurs dans $\mathbb{K}\left[X\right]$ sont triviaux
- Théorème de d'Alembert-Gauss (admis), description des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$
- **Factorisation sur** $\mathbb{C}$: $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ les racines distinctes de P, $m_1, \cdots, m_r$ leurs multiplicités et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ le coefficient dominant de P
- Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$, scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$: tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$
- P est scindé ssi P admet autant de racines comptées avec multiplicité que son degré ; P est scindé à racines simples ssi P admet autant de racines distinctes que son degré
- Si α est une racine d'un polynôme réel, alors $\overline{\alpha}$ l'est aussi avec même multiplicité, factorisation d'un polynôme sur $\mathbb{R}$
- **Factorisation sur** $\mathbb{R}$: $P = \lambda \left(\prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{m_k}\right) \left(\prod_{j=1}^{s} Q_j^{n_j}\right)$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles distinctes de P, $m_1, \cdots, m_r$ leurs multiplicités, $Q_1, \cdots, Q_s$ des polynômes réels irréductibles de degré 2 unitaires et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de P
- **Relations coefficients-racines** (ou formules de Viète)
- Factorisation "généralisée" (les valuations de chaque polynôme irréductible peuvent valoir 0), obtention du PGCD et du PPCM de deux polynômes à partir des valuations
- $A \wedge B = 1$ ssi A et B n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$
- Fraction rationnelle, ensemble $\mathbb{K}(X)$, c'est un corps pour $+$ et $\times$
- Une même fraction admet plusieurs écritures, fraction irréductible, on peut s'y ramener en divisant numérateur et dénominateur par leur PGCD, degré d'une fraction : c'est un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$
- Racine et pôle d'une fraction (avec la notion de multiplicité), *fonction* rationnelle, compatibilité avec les opérations $+, \lambda\cdot, \times$
- **Décomposition en éléments simples** : unicité de l'écriture, partie entière, forme générale sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, quelques "recettes de cuisine" pour trouver les coefficients

Chapitre 25 : Relations de comparaison

- Suite dominée, négligeable, équivalente à une autre suite, notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$
- D'autres propriétés qui seront rappelées lors du programme suivant...

Les exercices ne porteront pas sur les relations de comparaison

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **20, 22** et **23**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre. Les énoncés des théroèmes doivent être clairement... énoncés !*

1. Énoncer une caractérisation de $(X-\alpha)^m \mid P$ qui fait intervenir P et de ses dérivées (et la démontrer) Chapitre 23, Théorème 23.34

2. Énoncé uniquement : donner la forme de l'écriture factorisée d'un polynôme sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ (en précisant bien le rôle de chaque paramètre). Puis, on écrira les relations coefficients-racines sur un polynôme donné par l'examinateur. Chapitre 24, Théorèmes 24.6 et 24.11, Théorème 24.15

3. Les définitions de $u_n = o(v_n)$, $u_n = O(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On donnera aussi les équivalents usuels avec les fonctions exponentielle, ln, cos, sin, tan, arcsin, arctan, ch, sh et la fonction puissance α (avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$) Chapitre 25, Définitions 25.1 et 25.7, Corollaire 25.13

Questions Flash au programme :

Chapitre 23 :

- Rappeler la définition de "P et Q sont associés"
- Si $B \mid A$ dans quel cas peut-on dire que $\deg B \leq \deg A$? Que peut-on dire de plus si $\deg B = \deg A$?
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Rappeler la relation de Bézout (ou théorème de Bézout-Bachet) pour des polynômes
- Rappeler le théorème de Bézout pour des polynômes
- Que peut-on dire des polynômes AB et $(A \vee B)(A \wedge B)$?
- Compléter : α est une racine de P ssi ...... divise P
- Donner deux caractérisations de "α est racine de multiplicité exactement m" : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir P et ses dérivées.
- Donner deux caractérisations de "α est racine de multiplicité au moins m" : une avec une relation de divisibilité, une qui fait intervenir P et ses dérivées.
- Quel lien existe-t-il entre le degré d'un polynôme et son nombre de racines (comptées avec multiplicité) ?

Chapitre 22 :

- Écrire la forme développée (avec un signe $\sum$) d'un polynôme P tel que $\deg P \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$). Donner une CNS (condition nécessaire et suffisante) pour avoir $\deg P = n$.
- Donner les formules des degrés de $P+Q$ et de PQ
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. Compléter la formule : $PQ = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Que peut-on dire du degré de $P \circ Q$ si Q est constant ? et si Q est non constant ?
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Compléter la formule : $P' = \sum_{k=0}^{\dots} (\dots) X^k$
- Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme P

Chapitre 20 :

- Soit A, B des matrices de tailles respectives (n,p) et (p,q). Rappeler la formule qui exprime $\left[AB\right]_{ij}$ en fonction des coefficients de A et de B.
- Donner toutes les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Soit E^{ij} et $E^{k\ell}$ deux matrices élémentaires. Compléter la formule : $E^{ij}E^{k\ell} = \delta_{\dots}E^{\cdots}$
- Quelle structure algébrique peut-on mettre sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$? et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- Donner la forme (avec des 0, des $*$...) d'une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Idem pour les matrices triangulaires supérieures et inférieures.
- Si A et B sont diagonales, que peut-on dire de AB ? peut-on dire la même chose pour des matrices triangulaires ?
- Rappeler la formule du binôme dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ainsi que la formule $A^m - B^m$.
- Que *suffit-il* de vérifier pour qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit inversible ?
- Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Quelle est la taille de $A^\top$? Exprimer $\left[A^\top\right]_{ij}$ en fonction des coefficients de A.
- Exprimer différemment $(AB)^\top$ et $(A^\top)^{-1}$.
- Rappeler la définition de matrice symétrique et de matrice antisymétrique.